Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Geometría Euclidiana - Grupo Olímpico

Concurrencia y colinealidad. Teoremas selectos

Jafet Baca; 18 de diciembre de 2021

1. Una breve introducción a la razón cruzada

La razón cruzada es una invarianza fundamental en geometría euclidiana. Dados cuatro puntos alineados $A,\ B,\ C,\ D$, podemos definir la razón cruzada como:

$$(A, C; B, D) = \frac{BA}{BC} : \frac{DA}{DC} \tag{1}$$

donde las longitudes son *dirigidas*; esto es, establecemos una dirección particular como positiva y su opuesta como negativa. Precisamente, ocurre que $(A, C; B, D) > 0$ si los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son disjuntos o bien uno está contenido en el otro.

Definición 1.

Sea P un punto no colineal con $A,\ B,\ C,\ D$. Las rectas $PA,\ PB,\ PC,\ PD$ forman un *haz*, representado como $P(A, C; B, D)$.

A partir de la definición anterior, podemos probar nuestro primer resultado:

Proposición 1.

Dado un haz $P(A, C; B, D)$ y otra recta ℓ, sea $A' = \overline{PA} \cap \ell$. Los puntos $B',\ C',\ D'$ se contruyen de forma análoga. Entonces $(A, C; B, D) = P(A, C; B, D) = (A', C'; B', D')$.

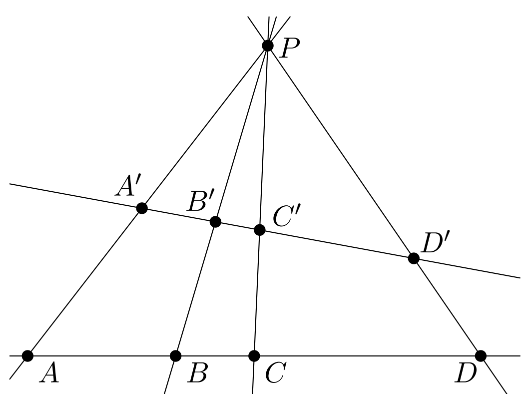


Figura 1: El haz $P(A, C; B, D)$.

Demostración. Al aplicar el teorema de la bisectriz generalizado a $\triangle APC$ con transversales PB y PD, respectivamente, obtenemos

$$\frac{BA}{BC} = \frac{PA}{PC} \cdot \frac{\sin \angle BPA}{\sin \angle BPC} \quad \text{y} \quad \frac{DA}{DC} = \frac{PA}{PC} \cdot \frac{\sin \angle DPA}{\sin \angle DPC}$$

por tanto

$$(A, C; B, D) = \frac{BA}{BC} : \frac{DA}{DC} = \frac{\sin \angle BPA}{\sin \angle BPC} \cdot \frac{\sin \angle DPA}{\sin \angle DPC}$$

donde las longitudes son dirigidas. Lo anterior claramente implica la conclusión deseada. □

El hecho anterior muestra el porqué la razón cruzada permanece constante: al considerar puntos de intersección de una recta con un haz del cual no forma parte, los cuatro puntos resultantes *conservan* la razón cruzada de los cuatro puntos originales. Una forma común de representar este hecho es $(A, C; B, D) \stackrel{P}{=} (A', C'; B', D')$.

Una situación similar acontece al relacionar haces con circunferencias.

Proposición 2.

Sean A, B, C y D puntos sobre una circunferencia Γ y P otro punto sobre Γ. Luego

$$|P(A, C; B, D)| = \left| \frac{BA}{BC} : \frac{DA}{DC} \right|$$

es decir, la razón cruzada $(A, C; B, D)$ es *independiente* de P.

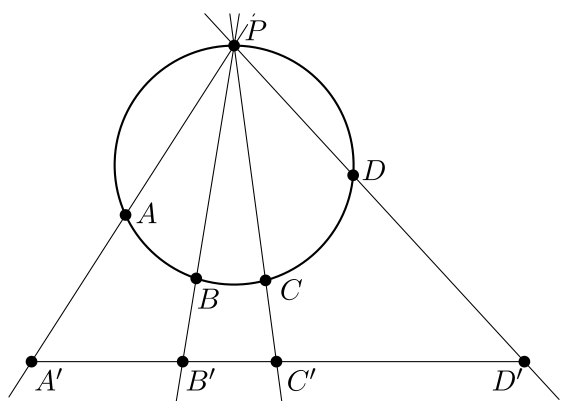


Figura 2: Razón cruzada en una circunferencia.

Demostración. Usando la prueba del hecho anterior y por la ley del seno en circunferencias deducimos que

$$\left| \frac{BA}{BC} : \frac{DA}{DC} \right| = \left| \frac{\sin \angle BPA}{\sin \angle BPC} \cdot \frac{\sin \angle DPA}{\sin \angle DPC} \right| = |(A, C; B, D)| = |P(A, C; B, D)|$$

□

En efecto, si AC y BD se cortan $P(A, C; B, D)$ es negativo, y positivo en caso contrario. La proposición anterior indica que, al considerar los puntos comunes correspondientes A', B', C', D' del haz $P(A, C; B, D)$ con otra recta, entonces $(A', C'; B', D') = (A, C; B, D)$; a su vez, esto significa que al proyectar un haz dado sobre una circunferencia o viceversa, la razón cruzada mantiene su carácter invariante.

Otras propiedades

1. Si r es un número real y $A,\ B,\ C$ son puntos distintos que yacen sobre una misma recta ℓ, entonces existe un único punto D en ℓ tal que $(A, C; B, D) = r$.

2. Se tiene que $(A, C; B, D) = (B, D; A, C)$.

3. El inverso de la proposición 1 también es cierto; es decir, si $(A, C; B, D) = (A', C'; B', D')$, y $A,\ B,\ C,\ D$ y $A',\ B',\ C',\ D'$ son dos cuartetas de puntos colineales, entonces $AA',\ BB',\ CC',\ DD'$ concurren.

2. Concurrencia y colinealidad: teoremas

2.1 Teoremas de Pascal y Brianchon

Teorema 1 (Pascal)**.**

Sea $ABCDEF$ un hexágono inscrito (no necesariamente convexo) en un círculo Γ. Entonces, los puntos $P = \overline{AB} \cap \overline{DE},\ Q = \overline{BC} \cap \overline{EF}$ y $R = \overline{CD} \cap \overline{FA}$ están alineados.

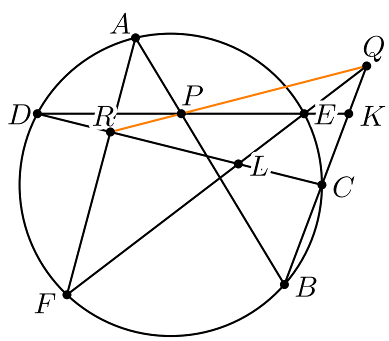


Figura 3: Teorema de Pascal.

Demostración. Defínanse $K = \overline{DE} \cap \overline{BC}$ y $L = \overline{DC} \cap \overline{EF}$. Por las proposiciones 1 y 2, se obtiene que,

$$(D, E; P, K) \stackrel{B}{=} (D, E; A, C) \stackrel{F}{=} (D, L; R, C)$$

luego, tomando en cuenta el inverso de la proposición 1, se concluye que $EL,\ PR$ y KC concurren en Q. La colinealidad sigue inmediatamente. $\square$

Además de su versión original, una de las razones que explican la tremenda utilidad del teorema de Pascal es que también es válido en casos extremos (como las que se muestran en la figura 4); esto es, cuando se cuenta con menos de 6 puntos sobre la circunferencia de referencia.
Tales situaciones degeneradas ocurren cuando dos de ellos coinciden, en cuyo caso la recta que los une está dada por la tangente correspondiente. Sin embargo, aún en estas circunstancias, continuamos trabajando con hexágonos repitiendo los vértices respectivos. Por ejemplo, el panel izquierdo de la figura 4 refleja la aplicación del resultado al hexágono $ABCDEE$ (pentágono $ABCDE$). Entretanto, las gráficas central y derecha corresponden a los hexágonos $ABCCDD$ (cuadrilátero $ABCD$) y $AABBCC$ (triángulo ABC).

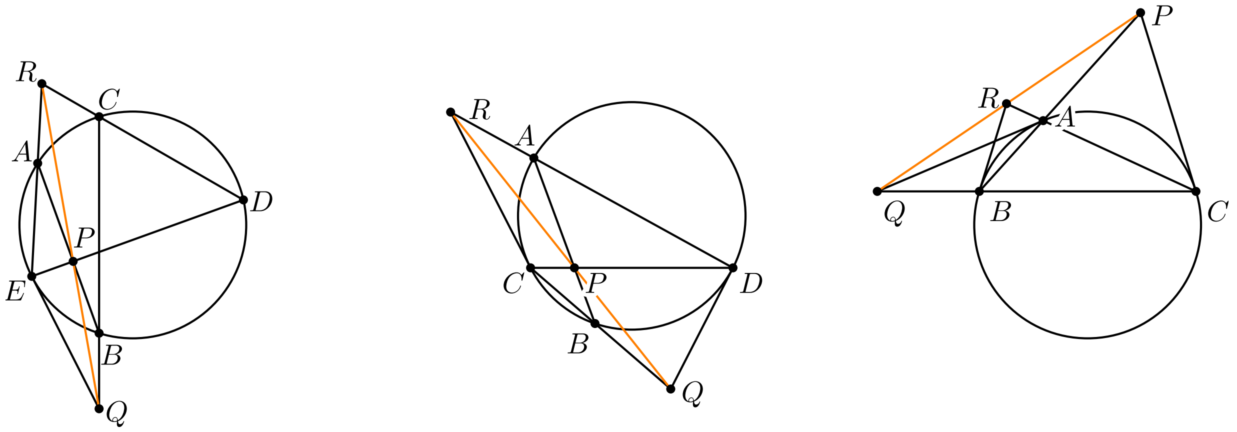


Figura 4: El teorema de Pascal admite versiones degeneradas.

A	B	C	D	E	F	
A	B		D	E		
	B	C		E	F	
		C	D		F	A

Una técnica útil para no olvidar los pares de rectas que determinan los puntos colineales es tomar los vértices consecutivos cuyas posiciones son las mismas al considerarlas módulo 3. Es decir:
Más interesante aún, el teorema de Pascal continúa siendo cierto para cualquier permutación de los vértices de $ABCDEF$. Al emplearlo, debe tenerse suficiente cuidado con el orden de los puntos para que obtengamos la colinealidad deseada. Vale mencionar que el resultado también aplica para cónicas; sin embargo, la versión para circunferencias es por mucho la más frecuente en olimpiadas.

Por otro lado, un resultado íntimamente relacionado al teorema de Pascal (no a primera vista) viene dado por:

Teorema 2 (Brianchon)**.**

Sea $ABCDEF$ un hexágono circunscrito (no necesariamente convexo) a un círculo Γ. Luego, las rectas AD, BE y CF son concurrentes.

Resulta que los teoremas de Pascal y Brianchon son *duales bajo la transformación polar*, en la que profundizaremos al estudiar polos y polares. Esto significa que, al tomar la colinealidad proporcionada por teorema de Pascal y aplicarle la transformación polar con respecto al círculo de referencia, inmediatamente obtenemos la concurrencia que el teorema de Brianchon implica.

Al igual que con el primer hecho, el teorema de Brianchon está sujeto a versiones degeneradas. En este caso, los vértices "degenerados" coinciden con los puntos de tangencia entre el polígono y el círculo inscrito. En efecto, al aplicar el teorema de Brianchon al hexágono $ABCDEF$ con D, F y B puntos de tangencia (como lo muestra el panel derecho de la figura 6), redescubrimos que los puntos de tangencia del incírculo de $\triangle ACE$ concurren (en el punto de Gergonne).
En el caso de Brianchon, las rectas están formadas por los puntos cuyas posiciones son las mismas módulo 3.

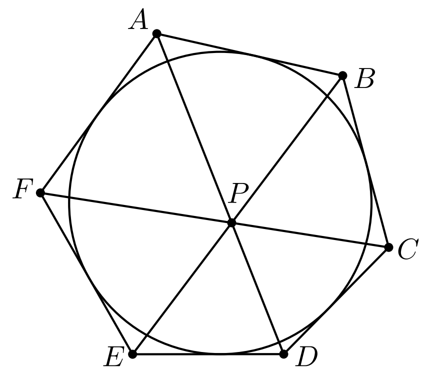


Figura 5: Teorema de Brianchon.

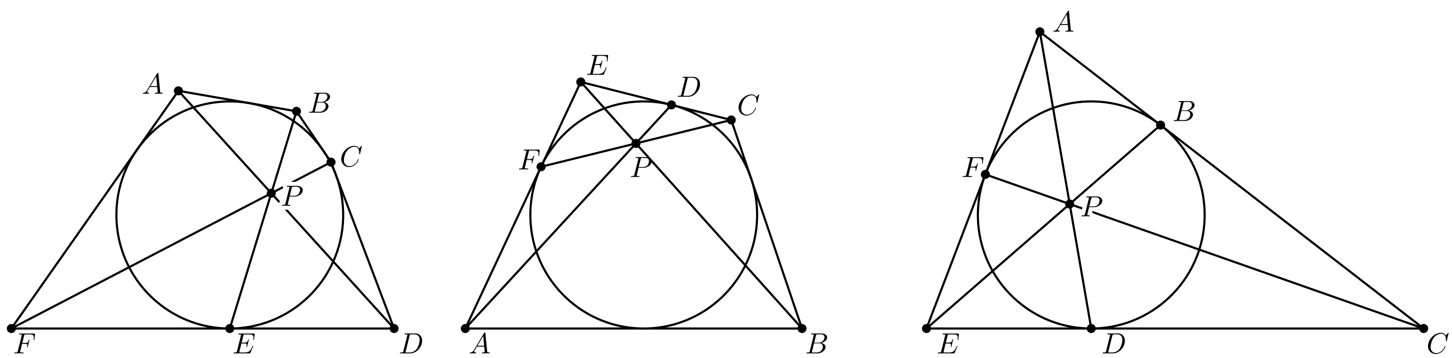
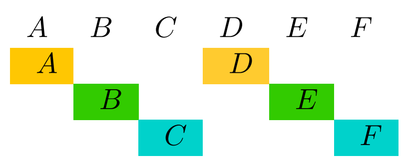


Figura 6: Casos degenerados del teorema de Brianchon.



2.2 Teorema de Pappus

El teorema de Pappus, con el mismo sentido pero mayor simplicidad que el teorema de Pascal, también brinda una tríada de puntos alineados.

Teorema 3 (Pappus)**.**

Sean A, B, C tres puntos colineales (no necesariamente en ese orden) y D, E, F tres puntos alineados (no necesariamente en ese orden). Luego, los puntos de intersección de las rectas AE, BD; AF, CD y BF, CE yacen sobre una misma recta.

Demostración. Consideremos los puntos $S = \overline{CD} \cap \overline{BF}$, $R' = \overline{CE} \cap \overline{PQ}$, $O = \overline{CA} \cap \overline{FD}$, $K = \overline{PQ} \cap \overline{AO}$ y $L = \overline{CP} \cap \overline{FO}$. Observemos que

$$(C, S; R', E) \overset{A}{=} (K, Q; R, P) \overset{C}{=} (O, D; E, L) \overset{P}{=} (O, B; A, C) \overset{F}{=} (E, R; S, C) = (C, S; R, E)$$

por consiguiente $R \equiv R'$ y el resultado sigue. $\square$

Figura 7: Teorema de Pappus.

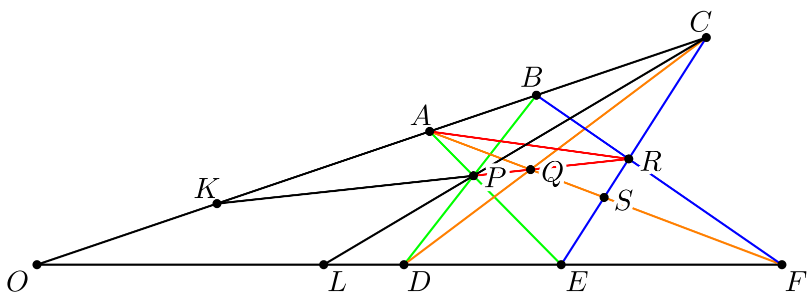
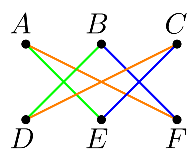


Figura 8: Prueba del teorema de Pappus.

Otra idea posible de demostración es considerar las dos rectas como una cónica degenerada, por lo que la colinealidad surge al aplicar el teorema de Pascal.

Una forma sencilla para no olvidar qué rectas determinan los puntos de intersección es la siguiente.



Cabe destacar que el teorema es válido sin importar el orden de los dos pares de tríadas de puntos que estamos considerando, como lo escenifica el diagrama derecho de la figura 7.

2.3 Teorema de Desargues

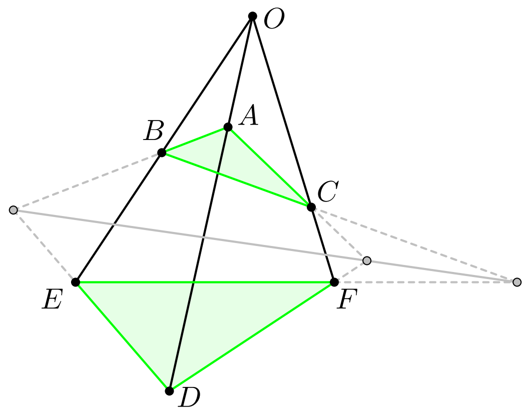
Consideremos dos triángulos arbitrarios ABC y DEF. Antes de establecer el principal resultado, es necesario proporcionar dos definiciones fundamentales.

Definición 2.

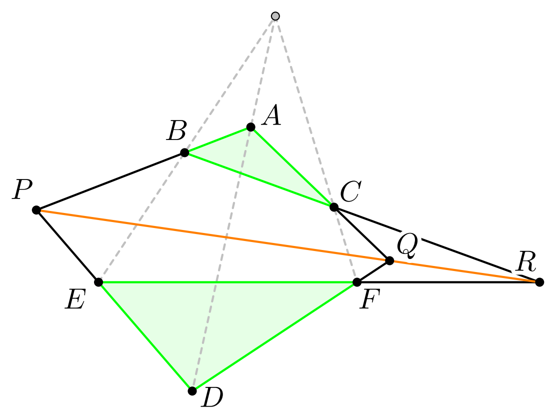
Los triángulos ABC y DEF están *en perspectiva con respecto a un punto* (digamos O), si las rectas que unen sus vértices correspondientes —a saber, AD, BE y CF—, concurren en O.
Este punto recibe el nombre de *perspector* de $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$.

Definición 3.

Los triángulos ABC y DEF están *en perspectiva con respecto a una recta* si los puntos de intersección de los pares de lados correspondientes de ambos triángulos —es decir, $P = \overline{AB} \cap \overline{DE}$, $Q = \overline{CA} \cap \overline{FD}$ y $R = \overline{BC} \cap \overline{EF}$—, están alineados.
La recta PQ es conocida como la *perspectriz* de $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$.



(a) Perspectiva con respecto a un punto.



(b) Perspectiva con respecto a una recta.

Teorema 4 (Desargues)**.**

Los triángulos ABC y DEF están en perspectiva con respecto a un punto si y solo si están en perspectiva con respecto a una recta.

Es decir, si $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ poseen un perspector, también deben tener una perspectriz y viceversa.

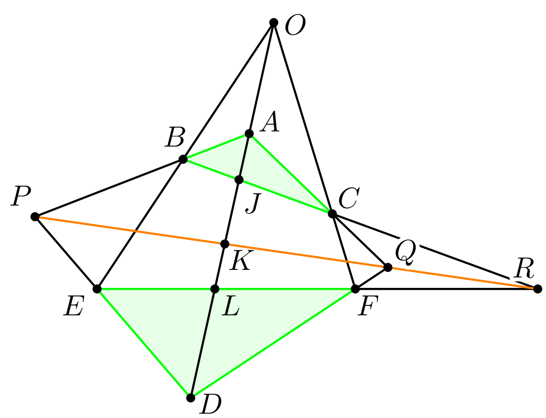


Figura 10: Teorema de Desargues.

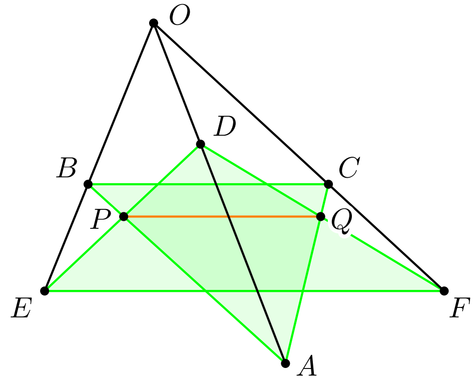
Demostración. Sean $J = \overline{BC} \cap \overline{AD}$, $K = \overline{PQ} \cap \overline{AD}$ y $L = \overline{EF} \cap \overline{AD}$. Además, definamos $R' = \overline{BC} \cap \overline{PQ}$ y $R'' = \overline{EF} \cap \overline{PQ}$. Por la propiedad 1, sabemos que P, Q y R están alineados si y solo si $(P, Q; K, R') =$

$(P, Q; K, R'')$. Pero,

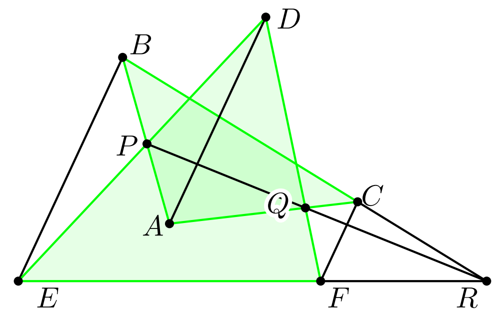
$$(P, Q; K, R') = (P, Q; K, R'') \iff (B, C; J, R') \stackrel{A}{=} (P, Q; K, R') = (P, Q; K, R'') \stackrel{D}{=} (E, F; L, R'')$$

por lo que $(P, Q; K, R') = (P, Q; K, R'')$ si y solo si AD, BE y CF concurren, como requeríamos. □

Notemos además que el hecho de que $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ estén en perspectiva respecto a O implica, de acuerdo con el teorema de Desargues, que $\triangle BPE$ y $\triangle CQF$ estén en perspectiva respecto a la recta AD y viceversa. Similarmente, si $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ están en perspectiva respecto a PQ, los triángulos $\triangle BPE$ y $\triangle CQF$ también están en perspectiva respecto a R. Es decir, un par de triángulos en perspectiva nos brinda otro par de triángulos con la misma propiedad.



(a) Las rectas BC, EF y PQ son paralelas.



(b) Las rectas BE, CF y AD son paralelas.

Figura 11: Versiones degeneradas.

Al igual que los teoremas anteriores, es muy común reconocer versiones degeneradas del teorema de Desargues en problemas de olimpiada. La figura 11a ilustra el caso en que un par de lados correspondientes son paralelos, $BC \parallel EF$. Según el resultado, $P_\infty = \overline{BC} \cap \overline{EF}$ debe estar sobre PQ, por tanto PQ también es paralela a BC y EF. Entretanto, el gráfico 11b ilustra la situación particular en la que $BE \parallel CF$. Por un argumento similar al anterior, también concluimos que AD es paralela a estas rectas.

3. Problemas resueltos

Ejemplo 5.

(Iberoamericana 2014, P5) Sea ABC un triángulo acutángulo y H su ortocentro. Sea D el pie de la altura desde A a BC. Sean M y N los puntos medios de BH y CH, respectivamente. Las rectas DM y DN cortan a AB y AC en X y Y respectivamente. Si P es la intersección de XY con BH y Q la intersección de XY con CH, demostrar que H, P, D, Q están sobre una circunferencia.

Solución. Notemos que los triángulos XMB y YNC están en perspectiva con respecto a la recta AD. Así, por el teorema de Desargues, las rectas XY, MN y BC deben concurrir. Sin embargo, al ser MN base media de BC inferimos que $MN \parallel BC$; por tanto XY también debe ser paralela a estas rectas.
Observemos que el triángulo BMD es isósceles en M, ya que este punto es el circuncentro de BHD. Como $XP \parallel BD$, es sencillo concluir que $XPDB$ es un trapecio isósceles (y cíclico, de paso). Entonces

$$\angle DHQ = \angle DHC = \angle ABC = \angle XBD = \angle QPD$$

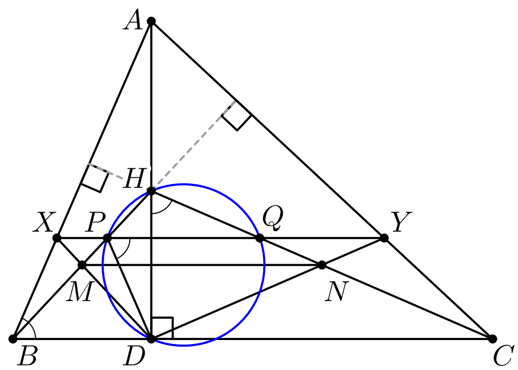


Figura 12: Problema 5 de la OIM 2014.

como requeríamos. ☐

Ejemplo 6.

(APMO 2008, P3) Sea Γ el circuncírculo del triángulo ABC. Un círculo que pasa por A y C corta a los lados BC y BA en D y E, respectivamente. Las rectas AD y CE intersecan a Γ por segunda vez en G y H, respectivamente. Las tangentes a Γ por A y C intersecan a la recta DE en L y M, respectivamente. Probar que las rectas LH y MG se cortan en Γ.

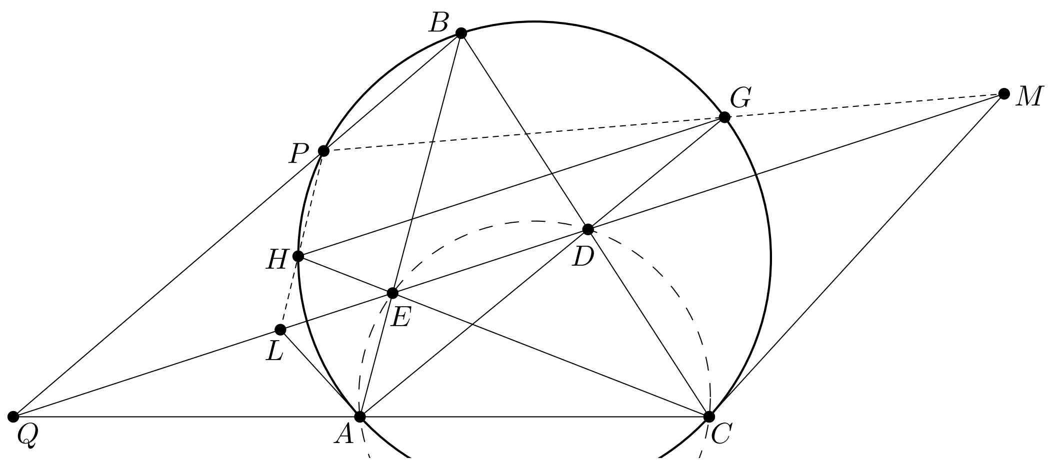


Figura 13: Un cuadrilátero cíclico innecesario gracias al teorema de Pascal.

Solución. Sean $Q = \overline{DE} \cap \overline{AC},\ P = \overline{BQ} \cap \Gamma,\ P \neq B,\ L' = \overline{PH} \cap \overline{AA}$ y $M' = \overline{PG} \cap \overline{CC}$. Por el teorema de Pascal en los hexágonos $BPHCAA$ y $BPGACC$ inferimos que $Q,\ L',\ E,\ D,\ M'$ son colineales, así que $L \equiv L'$ y $M' \equiv M$; por tanto, $QB,\ LH$ y MG concurren en P, el cual está sobre Γ. ☐

Ejemplo 7.

(Lista Corta IMO 2017, G1) Sea $ABCDE$ un pentágono convexo tal que $AB = BC = CD$, $\angle EAB = \angle BCD$ y $\angle EDC = \angle CBA$. Probar que la perpendicular desde E a BC y los segmentos AC y BD son concurrentes.

Solución. Denotemos por J y K los puntos de corte de BA y DE, CD y AE, respectivamente. Las condiciones angulares junto a $AB = BC = CD$ implican que $ABCK$ y $BCDJ$ son romboides. Por el teorema de Pitot, ambos cuadriláteros tienen un incírculo. Debido a que comparten los ángulos $\angle ABC$, $\angle BCD$ y el lado BC, sus incírculos deben coincidir, i.e. $ABCDE$ es un pentágono circunscrito con incentro I. Sea F el pie de la perpendicular desde E a BC. Tenemos que

$$\angle DEF = 270^\circ - \angle EDC - \angle BCD = 270^\circ - \angle ABC - \angle EAB = \angle FEA$$

de modo que $E,\ I$ y F son colineales. Luego, por el teorema de Brianchon al hexágono $ABFCDE$, se obtiene que $EF,\ AC$ y BD son concurrentes. □

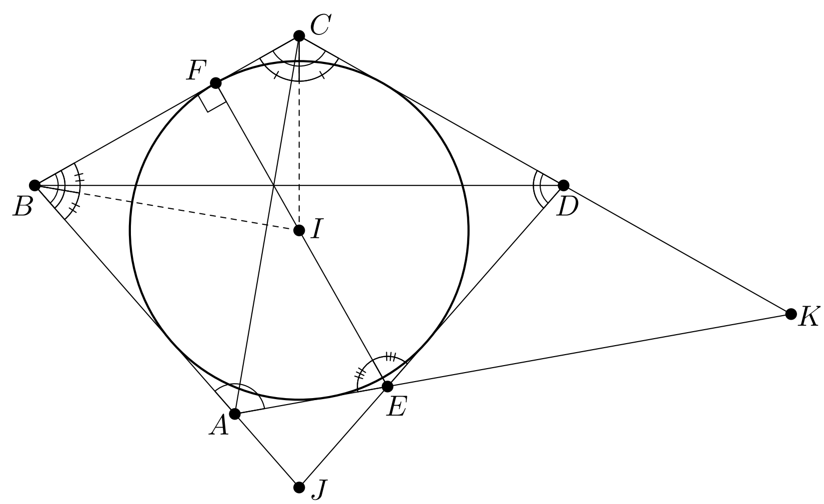


Figura 14: Problema G1 de la lista corta de la IMO 2017.

Ejemplo 8.

(IMO 2019, P2) En el triángulo ABC, el punto A_1 está en el lado BC y el punto B_1 está en el lado AC. Sean P y Q puntos en los segmentos AA_1 y BB_1, respectivamente, tales que PQ es paralelo a AB. Sea P_1 un punto en la recta PB_1 distinto de B_1, con B_1 entre P y P_1, y $\angle PP_1C = \angle BAC$. Análogamente, sea Q_1 un punto en la recta QA_1 distinto de A_1, con A_1 entre Q y Q_1, y $\angle CQ_1Q = \angle CBA$. Demostrar que los puntos P, Q, P_1, y Q_1 son concíclicos.

Solución. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $BC \geq AC$. Definamos los puntos $S = \overline{BA_1} \cap \overline{PB_1}$ y $T = \overline{AB_1} \cap \overline{QA_1}$. Por el teorema de Pappus aplicado a los puntos $P,\ B_1,\ S$ y $T,\ A_1,\ Q$ concluimos que $A,\ B$ y el punto de intersección de PQ y ST son colineales. Sin embargo, $PQ \parallel AB$, así que forzosamente $ST \parallel AB$. De este modo,

$$\angle PP_1C = \angle BAC = \angle STC \quad \text{y} \quad \angle QQ_1C = \angle CBA = \angle TSC$$

lo que implica que $STCP_1$ y TQ_1SC son cíclicos, por ende $C,\ P_1,\ Q_1,\ S$ y T yacen sobre la misma circunferencia. Entonces $\angle SP_1Q_1 = \angle STQ_1 = \angle PQQ_1$; por consiguiente, PQQ_1P es cíclico. □

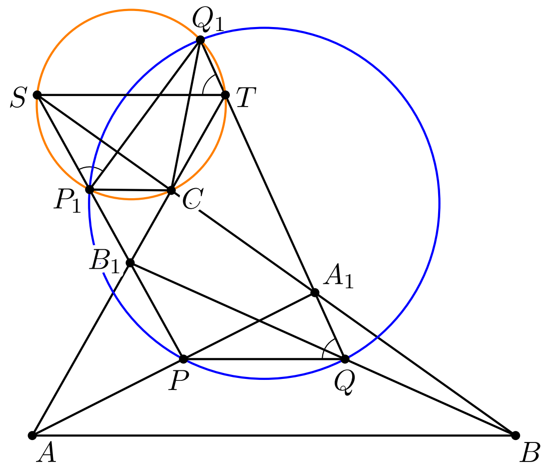


Figura 15: Problema 2 de la IMO 2019.

4. Problemas propuestos

1. Sea $ABCD$ un cuadrilátero con incírculo. Sean $M,\ N,\ P$ y Q los puntos de tangencia del incírculo con los lados $AB,\ BC,\ CD$ y DA, respectivamente. Probar que las rectas $AC,\ BD,\ MP$ y NQ concurren.

2. (Selectivo IMO, Moldavia, 2011). En el triángulo ABC con $AB < AC$, el punto H denota al ortocentro. Los puntos A_1 y B_1 son los pies de altura desde A y B, respectivamente. El punto D es la reflexión de C con respecto a A_1. Si E es la interseción de AC y DH, F la intersección de DH y A_1B_1, y G la intersección de AF y BH, demostrar que $CH,\ EG$ y AD concurren.

3. (Lista Corta IMO 2006, G6) Los círculos ω_1 y ω_2 con centros O_1 y O_2 son tangentes externamente en un punto D, y tangentes internamente a un círculo ω en E y F, respectivamente. La recta t es la tangente común de ω_1 y ω_2 que pasa por D. Sea AB el diámetro de AB de ω perpendicular a t, de modo que $A,\ E$ y O_1 están a un mismo lado de t. Demostrar que las rectas $AO_1,\ BO_2,\ EF$ y t son concurrentes.

4. (Ronda de Correspondencia, Sharygin 2020, P15) Un círculo que pasa por los vértices B y D del cuadrilátero $ABCD$ corta a $AB,\ BC,\ CD$ y DA en $K,\ L,\ M$ y N, respectivamente. Un círculo que pasa por K y M corta a AC en P y Q. Probar que $L,\ N,\ P$ y Q son concíclicos.

5. (Balcánica 2015, P2) Sea ABC un triángulo escaleno con incentro I y circuncírculo ω. Las rectas AI, BI, CI cortan a ω por segunda vez en D, E, F, respectivamente. Las parelelas desde I con respecto a los lados BC, AC, AB cortan a EF, DF, DE en K, L, M, respectivamente. Probar que los puntos K, L, M son colineales.

6. (Campeones Rumanos de Matemática 2016, P1) Sea ABC un triángulo y sea D un punto sobre el segmento $BC, D \neq B$ y $D \neq C$. El círculo ABD corta al segmento AC de nuevo en el punto interior E. El círculo ACD corta al segmento AB de nuevo en el punto interior F. Sea A' la reflexión de A con respecto a la recta BC. Las rectas $A'C$ y DE se cortan en P, y las rectas $A'B$ y DF se cortan en Q. Probar que las rectas AD, BP y CQ son concurrentes (or paralelas).

7. (APMO 2021, P3) Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico convexo y Γ su circuncírculo. Sea E la intersección de las diagonales AC y BD. Sea L el centro del círculo tangente a los lados AB, BC, y CD, y sea M el punto medio del arco BC de Γ que no contiene a A y D. Probar que el excentro del triángulo BCE opuesto a E está sobre la recta LM.

8. (Selectivo IMO, EE.UU., P6) Sea ABC un triángulo no equilátero y sean $M_a,\ M_b,\ M_c$ los puntos medios de los lados $BC,\ CA,\ AB$, respectivamente. Sea S un punto sobre la recta de Euler de ABC. Denótese por $X,\ Y,\ Z$ las segundas intersecciones de $M_aS,\ M_bS,\ M_cS$ con el círculo de los nueve puntos. Probar que $AX,\ BY$ y CZ son concurrentes.